Theorie Analysis 2:

Themen:

- Topologie metrischer Räume
  - ↳ Skalarprodukt
  - ↳ Induzierte Norm
  - ↳ Norm vs. Metrik
  - ↳ Metrische Räume & Produkträume
  - ↳ Mengen- & Folgenlehre
- Stetigkeit mit Beispielen

Topologie metrischer Räume:

Wir repetieren noch einmal einige topologische Konstrukte aus Analysis 1 & der linearen Algebra. Neu wird die Metrik als Distanzfunktion betrachtet.

Skalarprodukt: $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}, \; (a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$

Axiome: $\forall x,y,z \in V, \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$:

(i) $\langle x, \lambda(y+z) \rangle = \langle x, \lambda y + \lambda z \rangle = \langle x, \lambda y \rangle + \langle x, \lambda z \rangle$
$$= \underline{\lambda} \langle x,y \rangle \underline{+ \lambda \langle x,z \rangle}$$

(ii) $\langle x,y \rangle = \langle y,x \rangle$

(iii) $\langle x,x \rangle \geq 0, \; \langle x,x \rangle = 0 \iff x = 0$

Induzierte Norm: $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle), \; a \in V$

$$\|a\| = \sqrt{\langle a,a \rangle}$$

Norm vs. Metrik:

Norm: $\forall x,y \in V, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Definiert auf $\mathbb{K}$-Vektorraum
- "Abstand" oder "Länge"

Axiome:

(i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(ii) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(V, \|\cdot\|)$ heisst normierter Vektorraum

Bsp:

- $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$
- $V = \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$
- $V = C([a,b])$, $\|\cdot\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$

Metrik: $\forall x,y,z \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

- Definiert auf bel. Menge
- "Abstand"

Axiome:

(i) $d(x,y) \geq 0$, $d(x,y) = 0 \iff x = y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$(X, d(\cdot,\cdot))$ heisst metrische Raum

Bsp.

- Manhattan Metrik
- Französische Eisenbahn-metrik
- Norm induzierte Metrik

Äquivalenz von Normen:

2 Normen $\|\cdot\|_a, \|\cdot\|_b$ auf dem VR V heissen äquivalent, falls $\exists c, C > 0$, sodass:

$$c \cdot \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C \cdot \|x\|_a$$

Satz: Jede 2 Normen auf $\mathbb{R}^n$ (und $\mathbb{C}^n$) sind äquivalent.

↳ Somit sind alle Normen, welche uns interessieren, äquivalent!

Metrische Räume & Produkträume:

- Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metr. Raum mit:

$$d(a,b) := \|a-b\|$$

- (X,d) metrischer Raum $\to$ $U \subset X$ ist ein metrischer Raum $\leadsto$ Im Gegensatz zu Vektorräumen keine Axiome nötig?

Produkträume: (X_1, d_1) & (X_2, d_2) metrische Räume.

Dann ist $X_1 \times X_2$ ein metrischer Raum mit:

$$d((x,y),(x',y')) = \max\{d_1(x,x'), d_2(y,y')\}$$

$\leadsto$ Die "Distanz" zweier Tupel ist also einfach das Maximum der Distanzen der ersten Elemente oder der zweiten Elemente.

Für VR: $(V_1, \|\cdot\|_1)$ & $(V_2, \|\cdot\|_2)$ normierte Vektorräume, dann ist $V_1 \times V_2$ ein normierter Vektorraum mit

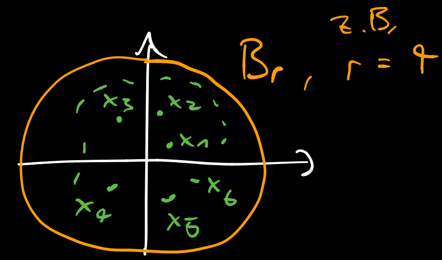
$$\|(x,y)\| = \max\{\|x\|_1, \|y\|_2\}$$

$\leadsto$ Die "Länge" des Tupels ist einfach das Maximum der Länge des ersten oder zweiten Elementes.

Folgeneigenschaften:

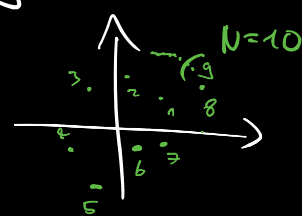
- Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ heisst <u>beschränkt</u>, falls $\exists r>0$:

$x_k \in B_r(0)$, $\forall k \in \mathbb{N}$



- Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ heisst <u>Cauchyfolge</u>, falls

$\forall r: \exists N \in \mathbb{N}: \forall k,l > N: \quad d(x_k, x_l) < r$



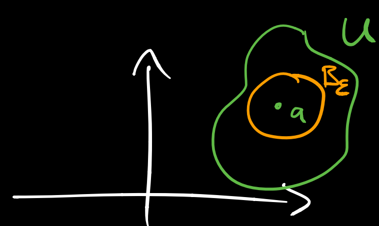
⇝ Folgenglieder sind ab einem gewissen Punkt beliebig nahe beieinander.

<u>Satz von Bolzano Weierstrass:</u> Jede Cauchyfolge konvergiert.

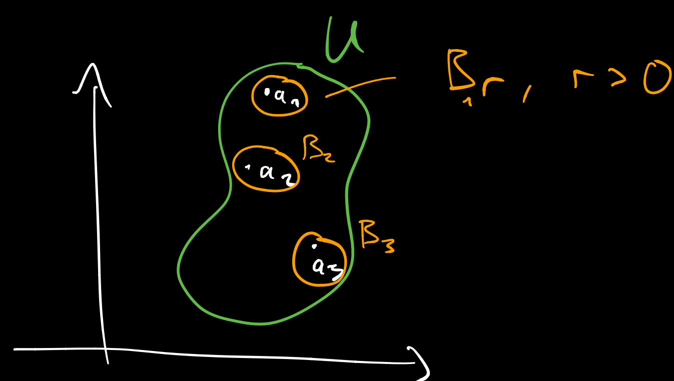
<u>Mengenlehre:</u>

- $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>Umgebung</u> von $a \in \mathbb{R}^n$, falls $\exists \varepsilon > 0$, s.d.:

$$B_\varepsilon(a) \subset U$$



- $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>offen</u>, falls U eine Umgebung $\forall a \in U$ ist.



→ Der Rand der Menge kann somit nicht zur Menge dazu gehören.

→ Auch für ein a unendlich nahe am Rand findet man noch ein $\varepsilon > 0$, s.d. der Ball $B_\varepsilon(a)$ komplett in U ist → Unintuitiv.

- $U \subset \mathbb{R}^n$ heisst <u>abgeschlossen</u>, falls $U^c = \mathbb{R}^n \setminus U$ offen ist.

  → <u>Alle</u> Punkte auf dem Rand der Menge müssen dementsprechend zur Menge gehören.

- Es gibt auch Mengen, welche weder offen noch abgeschlossen sind.

Bsp:

Diverse Beispiele:

- $B_r(a)$ ist offen
- $\overline{B_r}(a)$ ist abgeschlossen $\quad (\overline{B_r}(a) = B_r(a) \cup \underbrace{\partial B_r(a)}_{\text{Rand von } B_r(a)})$
- $\emptyset, \mathbb{R}^n$ sind offen & abgeschlossen
- $\{a\}$ ist abgeschlossen

Regeln:

- Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- Der Durchschnitt endlich vieler " ist offen
- Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossene Mengen ist abgeschlossen.
- Der Durchschnitt beliebig vieler " ist abgeschl.

Weitere Eigenschaften: Für jede Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt:

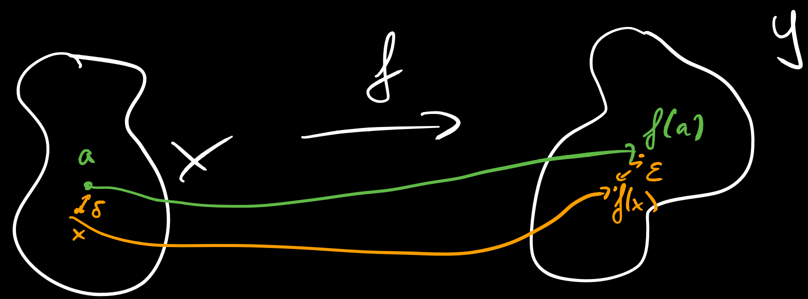
- $M \setminus \partial M$ ist offen
- $M \cup \partial M$ ist abgeschlossen
- ∂M ist abgeschlossen

Stetigkeit:

Def: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume. Eine Abbildung $f: X \to Y$ heisst stetig in $a \in X$, falls

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0$, s.d.:

$$d_Y(f(x), f(a)) < \varepsilon \quad \forall x \in X \text{ mit } d(x,a) < \delta$$



f ist stetig auf X, falls f stetig ist $\forall a \in X$

Lipschitz-Stetigkeit:

Def: Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume.
$f: X \to Y$ heisst Lipschitz falls $\exists L \geq 0 : \forall x, x' \in X$:

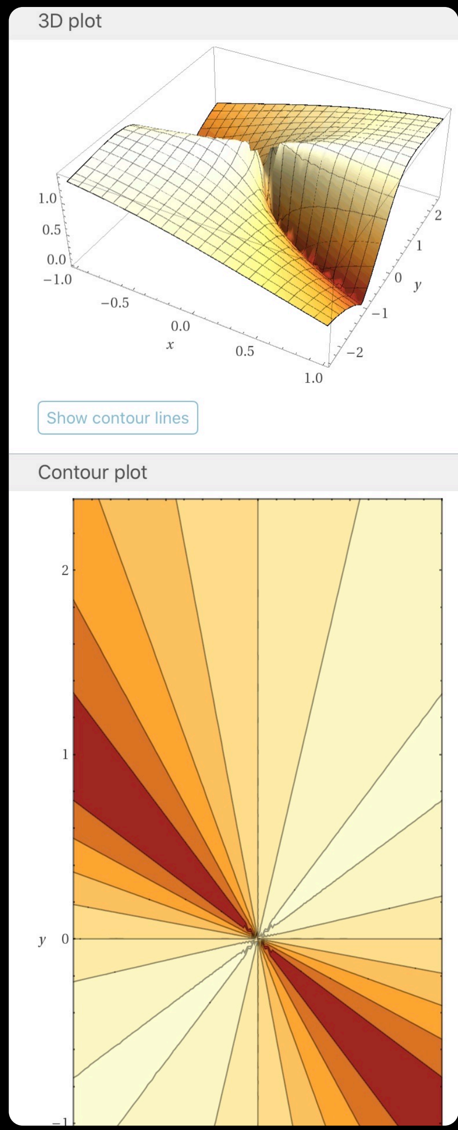
$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L\, d_X(x, x')$$

Wichtigste Eigenschaft:

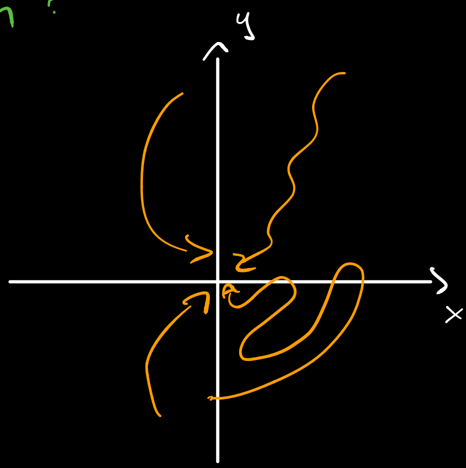
Komposition stetiger Funktionen ist wiederum stetig!

Beispiel:

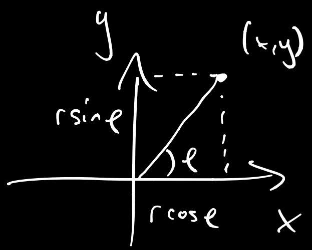
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$$



⇝ Müssen den Grenzwert aus <u>jeder</u> möglichen Richtung betrachten:



Dafür benutzen wir Polarkoordinaten:



$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x+y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{|r\cos\varphi + r\sin\varphi|}{\sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r\,|\cos\varphi + \sin\varphi|}{r\sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}} = \lim_{r\to 0} |\cos\varphi + \sin\varphi| \quad ↯ \text{ nicht stetig}$$

Beispiel:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2}$$

2. Methode für rationale Funktionen

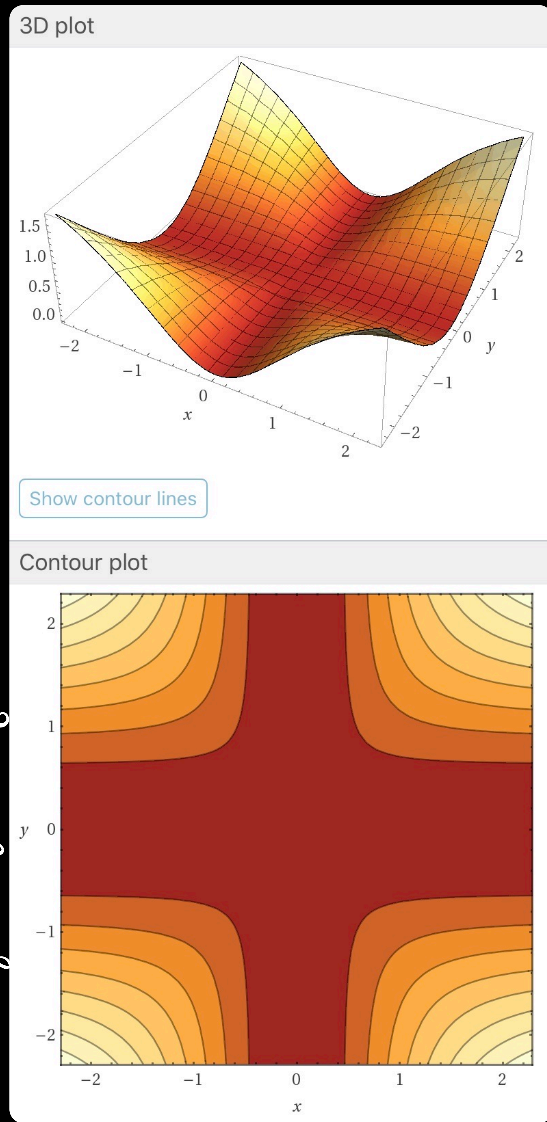
$$f(x,y) = \frac{p(x,y)}{q(x,y)}$$

→ Ersetze in $p(x,y)$ (x,y) mit $\|(x,y)\|_\infty$

→ Ersetze in $q(x,y)$ $|x+y|$ mit $\|(x,y)\|_\infty$

$|x^2+y^2|$ mit $\|(x,y)\|_\infty^2$

usw.



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2} \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\|(x,y)\|_\infty^4}{\|(x,y)\|_\infty^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \|(x,y)\|_\infty^2$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{2x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Wäre somit eine stetige Funktion

Klappt natürlich auch mit der anderen Methode:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{2\cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

$$= 0$$